Groupe Symétrique

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Définitions

Groupe symétrique d'un ensemble

L'ensemble des permutations de E

(i.e les bijections de E dans E)

forme un groupe pour la composition :

le groupe symétrique de E

S_n

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

S_n est le groupe symétrique de $[\![1, n]\!]$

$\forall \tau, \sigma \in \mathrm{S}_n$

On note $\tau\sigma$ au lieu de $\tau \circ \sigma$

Représentation

On représente une permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$ par $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

Ordre d'une permutation

L'ordre d'une permutation σ est

le plus petit entier $r > 0$ tel que $\sigma^r = \mathrm{id}$

Support d'une permutation

Le support d'une permutation σ est

l'ensemble des indices i tels que $\sigma(i) \neq i$

Un cycle

Un cycle est une permutation σ telle que

$\sigma(a_i) = a_{i+1}$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$

et $\sigma(a_n) = a_1$

Conjugaison

Si $\gamma = (a_1 \dots a_p)$ est un p-cycle et $\sigma \in \mathrm{S}_n$

$\sigma\gamma\sigma^{-1} = (a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(p)})$

On dit aussi que deux cycles quelconques sont conjugés

L'ordre d'un cycle est le cardinal de son support

Deux cycles à support disjoint commutent

Soit $\sigma \in \mathrm{S}_n$ et $a \in [\![1, n]\!]$

L'orbite de a par σ est $\{a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots, \sigma^{r-1}(a)\}$

où r est l'ordre de σ

Décomposition en produit de cycles

Toute permutation se décompose de façon unique en produit de cycles à support disjoints

L'ordre d'une permutation est le PPCM des ordres de ses cycles

Décomposition en produit de transpositions

Un cycle d'ordre 2 est une transposition

Toute permutation se décompose en produit de transpositions (mais pas forcément de façon unique)

Signature d'une permutation

Inversion

Une inversion est une paire d'indices i, j tels que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$

Signature

La signature d'une permutation σ est $\varepsilon(\sigma) = (-1)^i$ où i est le nombre d'inversions de σ

Caractère de ε

$\varepsilon : (\mathrm{S}_n, \circ) \to (\{-1, 1\}, \times)$ est un morphisme de groupes

Nombre de transpositions

Toute décomposition de σ fait intervenir
un nombre pair de transpositions si $\varepsilon(\sigma) = 1$
un nombre impair de transpositions si $\varepsilon(\sigma) = -1$

Parité d'une permutation

On dit qu'une permutation σ est paire si $\varepsilon(\sigma) = 1$, impaire si $\varepsilon(\sigma) = -1$

Sous-groupe des permutations paires

L'ensemble des permutations paires est un sous-groupe de S_n

L'ensemble des permutations impaires n'est pas un sous-groupe de S_n :
La composée de deux permutations impaires est paire

Exemples de décompositions

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$$